

Without a calculator, determine the value of

$$\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)\cdots(2000^2-1)(2002^2-1)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots 1999^2 \cdot 2001^2}$$

Solution! Use $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

We get!

$$\frac{(2-1)(2+1)(4-1)(4+1)(6-1)(6+1)\cdots(2000-1)(2000+1)\cdots}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots 1999^2 \cdot 2001^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots 1999 \cdot 2001 \cdot 2001 \cdot 2003}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots 1999^2 \cdot 2001^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots 1999^2 \cdot 2001^2 \cdot 2003}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots 1999^2 \cdot 2001^2}$$

$$= 2003 \checkmark$$